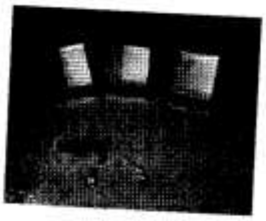
Quelques apports de la recherche en didactique **dans la construction des apprentissages en mathématiques** à l'école maternelle

Marie-Lise PELTIER, Maitre de Conférences en didactique des Mathématiques, LDAR, Université Paris Denis Diderot

En guise d'introduction...

Nous allons étudier rapidement une activité bien connue en maternelle : le tri d'objets[1], en l'occurrence un tri de « graines ».

Première situation : les élèves disposent de 3 boites ouvertes identiques et d'une collection de graines de 3 sortes, mélangées. Il s'agit de répartir les graines dans les boites. Chaque boite doit contenir le même type de graines.



Deux connaissances sont convoquées : la notion de collection et celle d'énumération qui sont constitutives du savoir « tri », mais ici ces connaissances sont contrôlées à l'insu des élèves (et du professeur) par le dispositif matériel.

Alors comment modifier le « milieu » pour « problématiser » la situation et permettre aux élèves de construire effectivement ces connaissances nécessaires au tri ?

Une solution consiste à proposer une **deuxième situation** avec des boites... « tirelires » !

Dans ce cas, le décalage entre l'intention de l'action et sa validation est construit et permet l'apprentissage. Cette fois, les connaissances ne sont pas contrôlées par le milieu matériel et l'élève va progressivement les construire en rejouant plusieurs fois pour « gagner ».

Si l'activité avec les boites ouvertes est un préalable indispensable pour comprendre la règle du jeu, elle ne suffit pas pour « apprendre ».

On voit ici clairement que ce n'est pas le choix du contexte, ou du jeu qui fait qu'une situation permet ou non un apprentissage, c'est le fait que les élèves aient à développer une activité cognitive relative à la notion dont on vise l'apprentissage.

Alors, qu'est-ce que faire des mathématiques quand on est un élève de maternelle ?

Faire des mathématiques, c'est penser pour prendre des décisions, et ceci dès la petite section !

La présence d'un milieu matériel n'implique pas la réduction de l'activité à une simple manipulation, car prévoir est différent d'illustrer.

Dans cet exposé, je décrirai succinctement en première partie les enjeux de l'école maternelle pour le « devenir mathématique » des élèves. Dans une seconde partie, j'évoquerai certains « savoirs cachés » en prenant l'exemple de l'apprentissage du « nombre ». Enfin, avant de conclure, je dirai quelques mots sur la question de la différenciation.

En raison du temps qui m'est compté je ne développe pas ici le cadre théorique utilisé (double approche didactico-ergonomique et socio-didactique relative à l'étude de la construction des inégalités scolaires).

Les enjeux de l'école maternelle pour le devenir mathématique des élèves

Faisons un petit tour, bien sûr subjectif, dans les programmes successifs pour mieux comprendre les évolutions.

1 En réalité il s'agit d'un classement, mais nous conserverons ici le mot tri plus évocateur pour les élèves.

Avant 1985 : les programmes sont encore très influencés par les « maths modernes » et l'approche piagétienne : centration sur l'acquisition de concepts organisateurs tels que classement, sériation, etc., mise en place d'activités, dites pré-numériques, devant assurer par exemple la conservation des quantités (correspondance terme à terme, etc.).

En 1985 les programmes « Chevènement » marquent une rupture très importante, ce sont les premiers programmes qui seront publiés en « livres de poche ». Les textes officiels ne sont ainsi plus à la seule destination des enseignants mais aussi des familles. En ce qui concerne les mathématiques, c'est le retour officiel du nombre à la « maternelle », assorti essentiellement de sa fonction de dénombrement par comptage un à un (dans les faits, pendant la période précédente, de très nombreux enseignants avaient maintenu des activités de dénombrement et familiarisé leurs élèves avec le nombre).

En 1989 la loi d'orientation instaure les cycles et donc officialise la nécessité de concevoir l'apprentissage sur un temps long. Elle instaure parallèlement la distinction entre compétences transversales (socialisation, espace/temps, langage) et compétences disciplinaires : ainsi le travail sur l'espace et le temps sort en partie du domaine scientifique. Elle met également l'accent sur la distinction, bien connue en recherche mais plus floue chez les enseignants ou les familles, entre enseignement et apprentissage. Les évaluations nationales sont pensées comme outils essentiellement à destination des enseignants pour faire le point, explorer les raisons pour lesquelles certains élèves ne rentrent pas dans les apprentissages et, si nécessaire, envisager des « remédiations ».

En 2002, sortent des programmes ambitieux issus d'une réflexion approfondie de groupes de travail mêlant experts et praticiens et qui résistent au changement de gouvernement (élaborés sous le ministère Lang et mis en application sous le ministère Ferry).
Ils sont nouveaux par la forme et le fond : il s'agit d'un texte publié et disponible en librairie, vulgarisant les résultats de recherche, accompagné de documents (d'application et d'accompagnement), à destination des seuls enseignants, pour aider à leur mise en œuvre et qui définissent clairement des compétences de fin de cycles.

En 2005 avec la loi Fillon apparaissent de nouvelles orientations : instauration du socle commun de connaissances de base risquant, de mon point de vue, de conduire à une perte de l'ambition pour tous. Pendant la période 2005-2008, des termes tels que « rentabilité » font leur entrée dans le vocabulaire de la pédagogie. On fait appel aux experts des neurosciences pour prescrire des pratiques... Dès 2007, le projet de « nouveaux programmes » fait son apparition sans avoir pris le temps d'évaluer les effets de ceux de 2002 (les premiers élèves ayant travaillé avec les programmes de 2002 ne sont qu'en 6ème, alors qu'on s'appuie sur les résultats médiocres des élèves de 14 ans aux évaluations internationales PISA pour les incriminer !).

C'est en 2008 que les programmes seront finalement publiés et mis en application sur tous les niveaux à la fois, avec, notamment en ce qui concerne les mathématiques, une mise en avant de l'automatisation et un retour vers l'acquisition de techniques. L'école maternelle se trouve « élémentarisée ». Les évaluations ont pour fonction de « déceler » des troubles du développement et des apprentissages. On constate une centration sur la réussite au détriment de l'apprentissage, une confusion entre compétences et connaissances. Les livrets individuels que doivent remplir les enseignants présentent dans bien des cas un nombre insensé d'items correspondant à un découpage des connaissances souvent dénué de sens, on « externalise » les problèmes et on médicalise les difficultés scolaires.

Depuis une quinzaine d'années, plusieurs recherches mettent en évidence l'effet enseignant sur les résultats des élèves. Certaines pratiques participent à la construction des inégalités scolaires souvent à l'insu des enseignants eux-mêmes et malgré leur investissement :
- une centration sur le « faire » : les élèves ont à effectuer des manipulations diverses répondant à des objectifs globaux, sans réflexion précise sur les enjeux de l'activité pour la construction de connaissances identifiables : les élèves exécutent la tâche sans envisager qu'il y a quelque chose à apprendre de cette tâche,
- une centration sur des tâches segmentées et « élémentarisées » sur fiches : la tâche, une fois la consigne donnée, se réduit souvent pour l'élève à du coloriage, des entourages, des tracés de liens, des copies de chiffres, etc.
- une évaluation très présente, pour pouvoir remplir les livrets de compétences, souvent à partir de travaux écrits au détriment de l'observation des élèves dans l'action lors de la résolution de tâches complexes,
- et, en mathématiques, une centration sur l'acquisition du « savoir compter », avec une omniprésence du nombre sous sa forme rituelle : connaissance de la comptine numérique, et comptage un à un.

La mutation de la société contemporaine, les modifications profondes des processus de socialisation, l'absence d'une image partagée du monde permettant de donner du sens au parcours scolaire, la difficulté à définir le type « d'homme » que l'école doit contribuer à construire rendent très difficile la tâche des enseignants. Pour ceux-ci, dans la majorité des cas, l'école est pensée comme un mode d'acculturation à un nouveau monde, monde de l'écrit, monde des organisations logiques et de la rationalité, soutenues par des pratiques langagières spécifiques...

L'école maternelle apparait comme le moment premier pour construire cet environnement culturel, et ainsi permettre à tous les élèves et à leurs familles d'en comprendre les enjeux. Mais ce point de vue est-il partagé par les familles ? Si la logique de l'école est « transparente » pour certains élèves et leurs parents qui sont des « natifs scolaires », elle est « opaque » pour d'autres qui ne décèlent pas les enjeux d'apprentissage des situations proposées, ne repèrent pas les « savoirs implicites » que l'école n'enseigne pas, ne comprennent pas les attentes de l'école en terme de posture...

Notre rôle en tant qu'enseignants de maternelle me semble donc d'apporter à tous les enfants ce qui est nécessaire pour pouvoir se construire en tant qu'élèves, notamment :
- le langage d'évocation, d'anticipation, d'aide à l'élaboration de la pensée,
- un cadre pour expérimenter, prendre des décisions et donner du sens aux notions de prévision, de validation, de causalité,
- la confiance et la sécurité pour pouvoir faire des tentatives, des essais souvent infructueux et donc répétés ; et de les responsabiliser dans l'acte d'apprendre.

Et en ce sens, les mathématiques sont une discipline « privilégiée » !
En effet, le « programme » est intégré dans le domaine « découverte du monde » laissant ainsi une certaine liberté pour envisager l'enseignement.
Les enjeux et les objectifs sont raisonnables :
- développer les connaissances spatiales en associant langage et actions,
- accumuler des expériences et savoir les interpréter et les évoquer,
- construire quelques connaissances conceptuelles : repérage, alignement, forme, tri, nombre, dans des situations où leur nécessité s'impose et leur donne sens,
- jouer pour mettre à l'épreuve ses capacités et ressentir la résistance des êtres et des choses,
- coopérer pour aller plus loin...

Par ailleurs, les enseignants disposent dans cette discipline, comme dans d'autres, d'« outils didactiques » robustes pour :
- développer le sens des connaissances,
- prendre en compte les obstacles liés à l'acquisition de certains savoirs,
- mettre en cause une conception de l'apprentissage allant du simple au complexe,
- mettre en cause l'idée que la simplification des tâches et/ou la répétition permet l'acquisition,
- penser le rôle du concret et des manipulations dans l'apprentissage de l'abstraction,
- penser la notion d'aide...

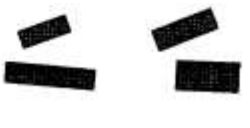
Savoirs cachés, fonction du matériel, rôle de la manipulation. Un exemple : l'apprentissage du « nombre »

Actuellement, des débats autour du comptage reviennent sur le devant de la scène. Dans certains cas, il s'agit de mettre en avant les recherches (notamment en psychologie du développement ou en neurosciences) qui décrivent les mécanismes des acquisitions des enfants, mais non les conditions et modalités scolaires pour qu'elles aient lieu. Dans d'autres cas, il s'agit de chercher des « coupables », programmes notamment, qui expliqueraient pourquoi les élèves n'ont pas les performances espérées sur le plan numérique.
Je ne rentrerai pas dans ces polémiques. Je vais seulement me borner à rappeler un certain nombre de résultats de recherches en didactique des mathématiques, nourries de recherches dans d'autres champs disciplinaires, pour revisiter rapidement la question de l'apprentissage du « nombre » dans un cadre scolaire.

Rappelons tout d'abord différentes fonctions du nombre :
- le nombre sert de « mémoire » d'une quantité en la dénombrant, d'une grandeur en la mesurant, d'une position en la repérant,
- le nombre sert pour comparer des quantités ou des grandeurs en leur absence ou lorsque la comparaison effective n'est pas possible,
- le nombre sert à calculer dans des situations de prévision, d'anticipation, de vérification.

Commençons par la question du dénombrement

Combien de rectangles sur ce dessin ?

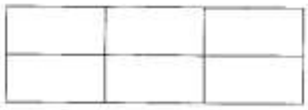


On voit directement par perception globale qu'il y en a 4 !

Et sur celui-là ?

Cette fois, certains verront perceptivement 4+4+1, d'autres 8+1, d'autres compteront 2 à 2, 1 à 1…

Et maintenant, combien de rectangles dans cette figure ?



On voit ici que la difficulté est double. D'une part, il faut s'entendre sur les objets à compter : qu'appelle-t-on « rectangle » dans ce cas ? Sont-ce les pièces du puzzle (au nombre de 6) ou les rectangles « figures », constitués de 1, 2, 3, 4 ou 6 petits rectangles du puzzle ? Si l'on choisit légitimement cette deuxième interprétation, il va falloir « organiser » le dénombrement en faisant une partition de la collection et en dénombrant les éléments de chaque partie.
Mais on peut aussi changer de point de vue sur les objets à compter, en considérant cette fois un rectangle comme entièrement déterminé par un couple de droites horizontales et un couple de droites verticales. Ce nouveau point de vue conduira à chercher le nombre de manière de choisir 2 horizontales parmi 3 et 2 verticales parmi 4.

Ces quelques exemples illustrent modestement que les procédures de dénombrement sont variées : « subitizing », comptage 1 à 1, n à n, partition et calcul, analyse combinatoire, estimation…
Le comptage un à un est une procédure de dénombrement culturellement reconnue et l'enseignement du comptage-numérotage correspond au modèle spontané d'enseignement, encouragé par l'institution. Mais il ne faudrait pas penser que seul ce comptage permet de dénombrer les éléments d'une collection. Ce résultat est bien connu depuis les années 1975-95. (Travaux des équipes INRP, travaux de G. Brousseau, C.Meljac etc.) et de nombreuses recherches montrent que son enseignement prématuré peut constituer un obstacle (didactique) à la construction du nombre. Cela ne signifie cependant pas qu'il faille « décrocher » les bandes numériques dans les classes maternelles et au CP !
Tous les enseignants savent que connaitre la comptine n'est pas suffisant pour savoir dénombrer un à un. Pour certains enfants les mots-nombres connus restent à quantifier durant de longs mois.

Des travaux de recherches, notamment ceux de J. Briand[2], montrent plusieurs types de procédures utilisées par les enfants de GS et CP dans le cas de collections d'objets non déplaçables : le marquage, le chainage, les groupements et des procédures mixtes. Ils montrent aussi une très grande hétérogénéité des savoirs enfantins.
On connait de nombreuses causes d'échec notamment l'absence de synchronisation effective entre la récitation de la comptine numérique et l'égrainage des objets de la collection. Mais J. Briand a mis en évidence que dans une tâche de dénombrement d'une collection non organisée d'objets dessinés, des élèves échouent alors qu'ils maitrisent la suite numérique et qu'ils disposent d'une bonne synchronisation du geste et de la parole. Il s'agit d'une absence de connaissance qui se manifeste par une difficulté à faire l'inventaire de la collection. Cette connaissance est désignée par le terme « énumération ».

Pour savoir « dénombrer » en comptant un à un, les compétences qu'il faut développer peuvent se résumer ainsi[3] :

1. Maitriser la comptine numérique orale et sa structure arithmétique.
Cette comptine s'acquiert par imprégnation et par paliers, elle est dialectiquement un objet que l'on étudie (on compte en croissant à partir de 1, de n, on compte de 2 en 2, on compte en décroissant, on dit le suivant, le précédent, on va le plus loin possible, on cherche les régularités…) et un outil pour résoudre des problèmes.

2. Utiliser cette comptine pour dénombrer les objets de la collection.
Ce qui signifie savoir coordonner le geste et la parole, comprendre que le dernier nombre doit correspond au nombre d'éléments de la collection, avoir compris que ni la nature des objets à compter, ni leur disposition spatiale n'ont d'incidence sur leur nombre, avoir compris que l'ordre dans lequel on parcourt la collection n'importe pas.

3. Organiser le dénombrement : séparer ce qui est compté de ce qu'il reste à compter pour ne pas oublier d'objets, ni en compter certains plusieurs fois.

En listant ces compétences, il faut donc être capable de
- *Distinguer deux éléments différents de la collection*
- *Choisir un élément de cette collection*
- Énoncer un mot-nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mots-nombres)

2 Briand, Thèse de doctorat (1994).
3 Voir la synthèse effectuée par M. Fayol (*L'enfant et le nombre*, 1990).

- *Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis*
- *Concevoir la collection des objets non encore choisis*
- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) les 4 points qui précèdent tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide
- *Savoir que l'on a choisi le dernier élément*
- Énoncer le dernier mot-nombre en tant que nombre d'éléments de la collection.

Les compétences en caractères droits relèvent de connaissances langagières, celles qui sont notées en italique relève d'une connaissance spécifique de nature spatiale nécessaire au « savoir dénombrer » peu enseignée à l'école.

Comment construire des situations spécifiques pour travailler cette connaissance ?

Donnons un exemple : la situation des allumettes.
Il s'agit d'un jeu : les élèves disposent de boites « tirelire » et d'un grand nombre d'allumettes.
Ils doivent se « débrouiller » pour « mettre une allumette et une seule dans chaque boite tirelire ».
La validation se fait en ouvrant les boites. On constate que les élèves ne réussissent pas du premier coup, mais que, peu à peu, en rejouant, ils construisent des stratégies pour savoir en permanence où ils en sont. Une grande vigilance est nécessaire pour éviter des effets induits par exemple par la disposition du matériel car, là encore, le milieu matériel peut résoudre le problème à la place de l'élève et à l'insu de l'enseignant…

Rappelons aussi que de très nombreuses variables sont à notre disposition pour adapter les situations de dénombrement à l'âge et aux compétences des élèves : la taille de la collection, la nature des objets à compter, la possibilité ou non de les déplacer, la disposition des objets de la collection…

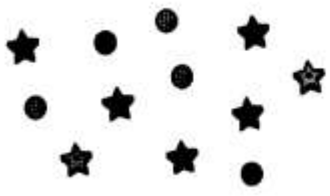
Donnons quelques exemples relatifs à la disposition spatiale :
Combien de perles sur cette image ?

La disposition en ligne facilite le balayage de la collection.

et sur celle-ci ?

La disposition en cercle rend nécessaire le choix d'un premier élément et sa mémorisation.

et sur celle-ci ?



Le balayage de la collection est intégralement à la charge de l'élève.

Naturellement, savoir « compter », c'est aussi savoir extraire une sous collection d'une collection, compléter une collection, développer des stratégies de comparaison de collections. Mais savoir « compter », c'est surtout avoir compris que le nombre était l'outil adapté pour se souvenir d'une quantité ou d'une position.

Les situations permettant la construction de cette connaissance portent le nom de « situations fondamentales du nombre »[4].

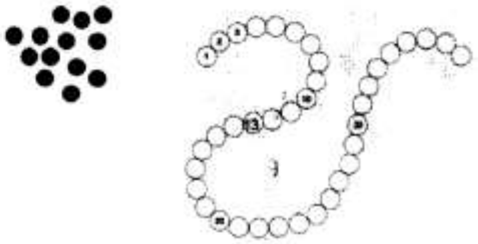
Une première série de situations ont pour but de conduire les élèves à découvrir que le nombre permet de se souvenir d'une quantité quand elle est absente ou éloignée.
Ces situations peuvent être caractérisées par leurs consignes « Aller chercher en un seul voyage juste ce qu'il faut pour… ». La situation « voitures et garages » est une illustration de ce type de situations.
Là encore la vigilance que doit exercer l'enseignant lorsqu'il donne la consigne est fondamentale :
S'il prononce le mot « nombre » ou s'il invite les élèves à compter, en utilisant par exemple la formulation « combien de… », il donne aux élèves non seulement la consigne mais aussi la solution !
Puis, l'enseignant fait évoluer la situation pour aboutir aux premiers écrits : il diffère dans le temps le voyage pour aller chercher… les élèves produisent alors des « écrits mémoire », puis il introduit un « marchand » pour exécuter la commande, l'écrit produit est alors un « écrit pour communiquer ».

Comme on le voit ici, les mathématiques contribuent à l'entrée dans l'écrit et se nourrissent de celui-ci.

Je ne m'étendrai pas ici sur une seconde situation fondamentale du nombre qui consiste à l'utiliser pour se souvenir d'une position et sur la nécessité de faire le lien entre ces deux fonctions du nombre.

4 Étudiées très finement par Brousseau (1984, 1992, 2004), Meljac (1991) et expérimentées par de nombreux chercheurs, notamment des équipes de Bordeaux et de l'INRP (ERMEL, 1990).

Ainsi par exemple, les élèves disposent d'une collection de cailloux et d'une piste. Ils doivent prévoir la case sur laquelle ils poseront le dernier caillou lorsqu'ils poseront un caillou sur chaque case en partant de la première.



La manipulation en posant les cailloux sur les cases permettra de valider ou d'invalider la prévision.

Cette situation conduit naturellement à numéroter les cases, et l'on obtient ainsi la « bande numérique » qui préfigure l'organisation linéaire ultérieure des nombres sur la droite numérique graduée. Cette bande numérique devient alors un écrit de référence permettant de passer d'une collection d'objets à son nombre d'éléments sous forme chiffrée, et de l'oral à l'écrit (naturellement la première case porte le nombre 1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Quelques mots sur « l'aide personnalisée » Une observation[5] en classe de GS

Le professeur montre une boite fermée et annonce : « Dans la boite il y a 7 cubes, certains sont bleus, d'autres rouges. Il y a 4 cubes rouges, combien y a-t-il de cubes bleus ? »

Les élèves disposent d'une feuille de papier ou d'une ardoise. Pour les élèves que le professeur juge a priori « en difficulté », elle distribue une boite contenant une quinzaine de cubes (des bleus et des rouges).

On peut penser que pour le professeur, disposer de vrais objets facilite la tâche de résolution. Or la situation avec les cubes est beaucoup plus complexe à gérer : les problèmes d'organisation, d'énumération deviennent prépondérants, les élèves oublient vite la question posée.

Les stratégies à mettre en œuvre nécessitent en fait d'avoir intégré finement la notion « partie/tout ». C'est en voyant certains forts en échec lorsqu'elle leur distribue les cubes pour les « aider » que le professeur en prend conscience.

Cette observation illustre un phénomène repéré à plusieurs reprises : les tâches que proposent les enseignants se déclinent en fonction du niveau supposé des élèves du plus concret pour les « plus faibles » au plus abstrait pour les « plus forts ». Le langage utilisé se décline de la même manière du plus proche de l'action effective au plus distancié. Ce choix rend quasiment impossible, pour les élèves les plus « faibles », l'accès aux opérations de « décontextualisation » indispensables pour construire des connaissances durables et transférables dans d'autres contextes.

Dans les pratiques ordinaires, les stratégies d'aide peuvent ainsi, à l'insu des enseignants, contribuer à renforcer les inégalités au lieu de les réduire.

Conclusion

L'entrée dans les mathématiques à l'école maternelle, c'est :

- une accumulation d'expériences tout d'abord libres puis finalisées, verbalisées puis évoquées,
- une rencontre progressive avec des situations construites et évolutives, organisées en fonction des connaissances à acquérir et dans le but de développer la capacité des élèves à penser, à anticiper, à raisonner.

Sans jamais oublier qu'apprendre en maternelle, c'est apprendre en jouant ! ■

Cet exposé s'appuie sur

- les nombreuses recherches sur les apprentissages numériques en maternelle (notamment Gelman et all, Meljac, Fayol, Brousseau, Briand, Salin, l'équipe ERMEL)

- les travaux du réseau RESEIDA sur « La Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages » (coordonnés par ESCOL université Paris 8)

Les vidéos ont été tournées à l'école Jules Michelet de Talence (33).

Que toutes les collègues qui ont accepté une caméra dans leurs classes soient ici remerciées.

5 Observation étudiée et relatée par C. Margolinas (2012).