Construire une posture de mathématicien

Jean-Louis KORZEN

« J'aimais, et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion »

Stendhal

La mathématique est la discipline de sélection au long du cursus scolaire. C'est à la fois l'interdiction d'accéder à des savoirs scientifiques et un outil d'exclusion d'un nombre important d'élèves du système scolaire. C'est un rapt du savoir au profit de quelques-uns. « Les mathématiques n'ont rien d'une discipline à part [...] qui pourrait faire l'objet pour certains d'un supplément d'instruction. [...] De quel droit amputerait-on, par défaut d'enseignement la pensée de quelqu'un de sa face mathématique ? »(1)

L'enseignement de cette discipline interroge nos pratiques car tous les élèves sont capables de réussir à la condition de leur en donner les moyens. Il convient d'y consacrer tous nos efforts car la lutte contre « l'analphabétisme » passe aussi par les mathématiques. Cette discipline est au cœur même de la question de la démocratisation de l'accès aux savoirs...

Concret ? Abstrait ? Un faux débat

On dit que la mathématique nécessite un haut niveau d'abstraction, et on oppose « concret » et « abstrait » de manière très arbitraire, prétendant que la réussite des élèves les plus en difficulté ne peut passer que par des problèmes-types pratiques (la coopérative, les livres et les cahiers de la classe, sont une source inépuisable parmi d'autres de problèmes contextualisés..)

Donner du sens aux mathématiques ne serait qu'en voir les aspects utilitaires. Faire des mathématiques serait alors emmagasiné des connaissances sous forme de recettes ou de formules et être capable de les répéter après les avoir mémorisées sans aucun pouvoir d'adaptation face à des situations nouvelles au détriment de la formation d'esprit nécessaire à une véritable appropriation de ces connaissances et à la faculté de les généraliser et de les transférer.

« On passe trop de temps à enseigner des » recettes « pour résoudre certains types de problèmes et trop peu pour une étude intelligente » (2)

C'est oublier que l'élaboration d'un concept, au travers des différentes étapes de sa construction, passe par un va-et-vient permanent de la pensée entre « concret » et « abstrait ». C'est oublier aussi deux difficultés majeures de nos élèves face aux apprentissages mathématiques :

- Décontextualiser et mathématiser la situation proposée : *Dans un parking contenant 52 places, 18 sont inoccupées. Combien y a t-il de voitures dans le parking ?* Parmi les procédures plus élaborées utilisées par les élèves, l'une d'elle consiste à passer de l'écriture 52 - 18 à l'écriture 54 - 20. Fréquemment, des élèves n'acceptent pas cette procédure. « *C'est faux. Il n'y a pas 54 places mais 52. C'est pas le bon problème.* »

- Ne pas voir les problèmes que sous-tendent les écritures mathématiques. Derrière l'écriture 8 + 2 = 10, nombre d'élèves ne verront qu'une réunion de huit « quelque chose » et de deux « quelque chose », mais ne verront pas des problèmes de différence d'âges *(Julien qui a huit ans, a deux ans de moins que son frère. Quel âge a son frère ?)* L'enjeu pédagogique n'est donc pas ce passage du concret à l'abstrait mais la mise en relation de ces deux pôles...

Math objet, math outil

Il nous faut définir ce que sont les apprentissages mathématiques, ce qu'est « faire des mathématiques ». Pour cela on peut définir ce que ce n'est pas :

- Ce n'est pas l'application de théorèmes, ce n'est pas une simple acquisition de mécanismes. Cette vision réductrice s'appuie sur l'idée que retenir est facile et comprendre est difficile. Il est important de chasser cette idée.

(1) R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Colin, 1991.
(2) T.J. Fletcher, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui*, OCDL, 1966.

- Ce n'est pas non plus une juxtaposition de techniques répondant à des problèmes contextuels particuliers. Faire des mathématiques, c'est agir sur les objets mathématiques et leur représentation ; c'est de cette action que naîtra l'abstraction. « *L'intelligence, instrument de connaissance, sort de l'action et y retourne.* » (3)

Vouloir aussi s'appuyer sur les mathématiques pour expliquer le monde, c'est la démarche de l'esprit « *s'éprouvant par l'action qui le suscite et qu'il suscite.* » (4). Le mathématicien est avant tout quelqu'un qui cherche à résoudre des problèmes dont personne encore ne connaît la réponse. C'est cette posture que doivent adopter nos élèves : celle d'un chercheur, car l'objectif des mathématiques c'est de comprendre. « *Pour que les élèves dans leur ensemble acquièrent des connaissances [...] l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où la classe simule une société de chercheurs en activité.* » (5)

Faire des mathématiques, c'est élaborer un mode de pensée de l'objet mathématique qui a sa logique interne. C'est apprendre à entrer dans cette logique.

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. La résolution de ces problèmes, contextualisés ou non, permet de mettre à jour des contenus pour lesquels les techniques ne sont qu'un des éléments, les autres étant l'élaboration de stratégies, de structures et de liens. Dans cette optique l'opposition « concret/abstrait » n'est pas significative, les problèmes à résoudre pouvant renvoyer soit à des situations concrètes, soit à des situations sans lien avec un contexte possible *(écrire 2004 en utilisant une fois seulement tous les nombres de 1 à 9, et les quatre opérations).*

Ainsi, compter, ce n'est pas faire des mathématiques. Mais le comptage est un outil indispensable à l'activité mathématique du type : *quelle est la somme des cinq premiers nombres impairs ?* Poser ce problème au début du cours préparatoire est un vrai problème à résoudre (un objet mathématique) et la pensée en action qui amène à la solution éclaire la formulation : faire des mathématiques, c'est-à-dire créer des démarches, des procédures des théorèmes en acte à partir de savoirs existants pour inventer d'autres savoirs. L'identification d'angles droits est un outil mathématique. La classification des différents quadrilatères en fonction du nombre d'angles droits est un problème qui traite un objet mathématique ; de la résolution de ce problème nous vient que le carré est un rectangle particulier.

Comme on peut le voir dans ces deux exemples, la maîtrise de techniques, devenus outils, est nécessaire pour que chaque élève puisse entièrement se mobiliser pour résoudre des problèmes nouveaux. Un travail très important sur le calcul mental réfléchi, en particulier, et sur l'automatisation des procédures réfléchies permet de rendre disponibles des outils indispensables à la résolution de problèmes.

Nous parlerons ici d'automatismes. Une très grande partie des automatismes aura été construite par l'ensemble des procédures qui les sous-tendent. Nous opposons ici automatisme, référant à une construction de savoirs, à mécanisme, référant à une imprégnation non réfléchie donc non transférable.

Le champ des apprentissages

Le champ mathématique couvre à la fois l'acquisition/construction de savoirs savants (démarches d'auto-socio-construction de savoirs mathématiques, pour cela on peut se référer au dernier ouvrage paru d'Odette Bassis (6), et aussi la découverte et l'acquisition/construction de différentes stratégies de résolution de situations problèmes. Nous reprendrons une définition de la situation problème, issue du numéro 106 de la Revue Française de Pédagogie, citée par Alain Dalongeville et Michel Hubert (7) : « *La situation-problème est une situation d'apprentissage où une énigme proposée à l'élève ne peut être dénouée que s'il remanie une représentation précisément identifiée ou s'il acquiert une compétence qui lui fait défaut, c'est-à-dire s'il surmonte un obstacle. C'est en vue de ce progrès que la situation est bâtie* ».

Les différentes procédures de résolution trouvent toute leur place, y compris celles qui ne paraissent pas nécessairement mathématiques. On peut citer de manière non-exhaustive :

L'essai/erreur qui permet aux élèves de résoudre des problèmes dont ils ignorent la technique de résolution dite méthode experte.

Des élèves de cours moyen peuvent aisément résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Par exemple : *dans une ferme, il y a des lapins et des poules ; on compte 20 têtes et 64 pattes ; combien y-a t'il de lapins et de poules ?* Pendant très longtemps les mathématiciens, pour résoudre ce type de problème ont utilisé une méthode dite de « fausse position » qui s'apparente tout à fait aux stratégies d'essai/erreur utilisées par nos élèves.

L'induction : généraliser à partir de cas particuliers. Prenons comme exemple le problème suivant : *huit enfants se retrouvent dans un jardin public. Chacun d'eux serre la main de tous les autres. Combien y a-t-il de poignées de mains ?*

La solution experte est d'appliquer la formule : n (n-1) : 2 qui peut se démontrer formellement en utilisant le raisonnement par récurrence.

Mais, pour résoudre ce problème, l'élève peut chercher le nombre de poignées de mains avec deux enfants (= 1) avec trois enfants (1 + 2 = 3) avec quatre enfants (1 + 2 + 3 = 6) et trouver une règle lui permettant de généraliser. «*J'induis que c'est la somme des (n - 1) premiers nombres* . (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28) ».

(3) Henri Wallon, *De l'acte à la pensée*, Flammarion (1942)
(4) Henri Bassis, *Les cahiers de l'école et la vie* n° 2, Colin (1969)
(5) Régine Douady, Recherches en didactiques des mathématiques.
(6) *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques Tome 1*, Hachette (2003).
(7) Alain Dalongeville et Michel Hubert, *(Se) former par les situations problèmes*, Chronique Sociale (1999).

- Ce n'est pas non plus une juxtaposition de techniques répondant à des problèmes contextuels particuliers. Faire des mathématiques, c'est agir sur les objets mathématiques et leur représentation ; c'est de cette action que naîtra l'abstraction. « *L'intelligence, instrument de connaissance, sort de l'action et y retourne.* » (3)

Vouloir aussi s'appuyer sur les mathématiques pour expliquer le monde, c'est la démarche de l'esprit « *s'éprouvant par l'action qui le suscite et qu'il suscite.* » (4). Le mathématicien est avant tout quelqu'un qui cherche à résoudre des problèmes dont personne encore ne connaît la réponse. C'est cette posture que doivent adopter nos élèves : celle d'un chercheur, car l'objectif des mathématiques c'est de comprendre. « *Pour que les élèves dans leur ensemble acquièrent des connaissances [...] l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où la classe simule une société de chercheurs en activité.* » (5)

Faire des mathématiques, c'est élaborer un mode de pensée de l'objet mathématique qui a sa logique interne. C'est apprendre à entrer dans cette logique.

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes. La résolution de ces problèmes, contextualisés ou non, permet de mettre à jour des contenus pour lesquels les techniques ne sont qu'un des éléments, les autres étant l'élaboration de stratégies, de structures et de liens. Dans cette optique l'opposition « concret/abstrait » n'est pas significative, les problèmes à résoudre pouvant renvoyer soit à des situations concrètes, soit à des situations sans lien avec un contexte possible *(écrire 2004 en utilisant une fois seulement tous les nombres de 1 à 9, et les quatre opérations).*

Ainsi, compter, ce n'est pas faire des mathématiques. Mais le comptage est un outil indispensable à l'activité mathématique du type : *quelle est la somme des cinq premiers nombres impairs ?* Poser ce problème au début du cours préparatoire est un vrai problème à résoudre (un objet mathématique) et la pensée en action qui amène à la solution éclaire la formulation : faire des mathématiques, c'est-à-dire créer des démarches, des procédures des théorèmes en acte à partir de savoirs existants pour inventer d'autres savoirs. L'identification d'angles droits est un outil mathématique. La classification des différents quadrilatères en fonction du nombre d'angles droits est un problème qui traite un objet mathématique ; de la résolution de ce problème nous vient que le carré est un rectangle particulier.

Comme on peut le voir dans ces deux exemples, la maîtrise de techniques, devenus outils, est nécessaire pour que chaque élève puisse entièrement se mobiliser pour résoudre des problèmes nouveaux. Un travail très important sur le calcul mental réfléchi, en particulier, et sur l'automatisation des procédures réfléchies permet de rendre disponibles des outils indispensables à la résolution de problèmes.

Nous parlerons ici d'automatismes. Une très grande partie des automatismes aura été construite par l'ensemble des procédures qui les sous-tendent. Nous opposons ici automatisme, référant à une construction de savoirs, à mécanisme, référant à une imprégnation non réfléchie donc non transférable.

Le champ des apprentissages

Le champ mathématique couvre à la fois l'acquisition/construction de savoirs savants (démarches d'auto-socio-construction de savoirs mathématiques, pour cela on peut se référer au dernier ouvrage paru d'Odette Bassis (6), et aussi la découverte et l'acquisition/construction de différentes stratégies de résolution de situations problèmes. Nous reprendrons une définition de la situation problème, issue du numéro 106 de la Revue Française de Pédagogie, citée par Alain Dalongeville et Michel Hubert (7) : « *La situation-problème est une situation d'apprentissage où une énigme proposée à l'élève ne peut être dénouée que s'il remanie une représentation précisément identifiée ou s'il acquiert une compétence qui lui fait défaut, c'est-à-dire s'il surmonte un obstacle. C'est en vue de ce progrès que la situation est bâtie* ».

Les différentes procédures de résolution trouvent toute leur place, y compris celles qui ne paraissent pas nécessairement mathématiques. On peut citer de manière non-exhaustive :

L'essai/erreur qui permet aux élèves de résoudre des problèmes dont ils ignorent la technique de résolution dite méthode experte.

Des élèves de cours moyen peuvent aisément résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Par exemple : *dans une ferme, il y a des lapins et des poules ; on compte 20 têtes et 64 pattes ; combien y-a t'il de lapins et de poules ?* Pendant très longtemps les mathématiciens, pour résoudre ce type de problème ont utilisé une méthode dite de « fausse position » qui s'apparente tout à fait aux stratégies d'essai/erreur utilisées par nos élèves.

L'induction : généraliser à partir de cas particuliers. Prenons comme exemple le problème suivant : *huit enfants se retrouvent dans un jardin public. Chacun d'eux serre la main de tous les autres. Combien y a-t-il de poignées de mains ?*

La solution experte est d'appliquer la formule : n (n-1) : 2 qui peut se démontrer formellement en utilisant le raisonnement par récurrence.

Mais, pour résoudre ce problème, l'élève peut chercher le nombre de poignées de mains avec deux enfants (= 1) avec trois enfants (1 + 2 = 3) avec quatre enfants (1 + 2 + 3 = 6) et trouver une règle lui permettant de généraliser. «*J'induis que c'est la somme des (n - 1) premiers nombres*. (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28) ».

(3) Henri Wallon, *De l'acte à la pensée,* Flammarion (1942)
(4) Henri Bassis, *Les cahiers de l'école et la vie* n° 2, Colin (1969)
(5) Régine Douady, Recherches en didactiques des mathématiques.
(6) *Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques Tome 1,* Hachette (2003).
(7) Alain Dalongeville et Michel Hubert, *(Se) former par les situations problèmes,* Chronique Sociale (1999).